

## ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

**ΘΕΜΑ:** Προβλήματα συνοριακών τιμών και η συνάρτηση Green

• Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (εξίσωση δεύτερης τάξης)

$$\begin{aligned} x''(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= a, \quad x(1) = b \end{aligned}$$

ανάγεται στην ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$x(t) = a + (b - a)t - \int_0^1 K(t, s)f(s, x(s))ds$$

με πυρήνα

$$K(t, s) := \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq s \leq t \\ 1, & 0 \leq t \leq s. \end{cases}$$

(που δεν εξαρτάται από την συνάρτηση  $f$  αλλά από τις συνοριακές τιμές).

• Το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και η συνάρτηση Green

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών που απαρτίζεται από την γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t), \quad t \in [0, 1]$$

και τις (γραμμικές) συνοριακές τιμές

$$\begin{aligned} C_1[y] &:= c_1y(0) + c_2y'(0) + c_3y(1) + c_4y'(1) = A \\ C_2[y] &:= d_1y(0) + d_2y'(0) + d_3y(1) + d_4y'(1) = B. \end{aligned}$$

• Βήμα 1: Το ομογενές πρόβλημα.

Θεωρούμε το πρόβλημα που απαρτίζεται από την ομογενή εξίσωση  $L[y] = 0$ ,  $t \in [0, 1]$  και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες  $C_1[y] = 0$ ,  $C_2[y] = 0$ , δηλαδή το πστ

$$\begin{aligned} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) &= 0, \quad t \in [0, 1] \\ c_1y(0) + c_2y'(0) + c_3y(1) + c_4y'(1) &= 0 \\ d_1y(0) + d_2y'(0) + d_3y(1) + d_4y'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Σχετικά με την ύπαρξη μη μηδενικών λύσεων έχουμε την επόμενη πρόταση.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** Αν  $\{y_1, y_2\}$  είναι ένα βασικό σύνολο της ομογενούς εξίσωσης  $L_0$ . Τότε το ομογενές πστ  $L_0 - C_0$  δέχεται και μη μηδενικές λύσεις αν και μόνον αν

$$D(y_1, y_2) := \begin{bmatrix} C_1[y_1] & C_1[y_2] \\ C_2[y_1] & C_2[y_2] \end{bmatrix} = 0.$$

**Απόδειξη.**

**Παράδειγμα.**

**Πόρισμα.** Αν  $\{y_1, y_2\}$  είναι ένα βασικό σύνολο της ομογενούς εξίσωσης  $L_0$ , τότε το ομογενές πστ δέχεται άπειρο πλήθος λύσεων αν και μόνον αν

$$D(y_1, y_2) = 0.$$

**Παράδειγμα.**

- Βήμα 2 Έπαρξη λύσεων για το μη ομογενές πστ.

**ΠΡΟΤΑΣΗ.** Αν  $\{y_1, y_2\}$  είναι ένα βασικό σύνολο της ομογενούς εξίσωσης  $L_0$ .

Τότε το μη ομογενές πστ  $L_T - C$  έχει μία ακριβώς λύση αν και μόνον αν το ομογενές πστ  $L_T - C$  έχει μόνον την μηδενική λύση. [Δηλαδή αν και μόνον αν είναι  $D(y_1, y_2) \neq 0$ .]

**Απόδειξη.**

**Παραδείγματα.** (πστ με άπειρο πλήθος λύσεων - χωρίς λύσεις - κ.α.)

- Η αναγωγή του πστ

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = b(t), \quad y(0) = 0 = y'(1).$$

σε ολοκληρωτική εξίσωση.

Ο πυρήνας  $K(t, s)$  είναι μια συνάρτηση (συνάρτηση Green) δύο μεταβλητών που έχει ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τον πυρήνα αυτόν και μόνον αυτόν, δηλ. είναι η μοναδική συνάρτηση δύο μεταβλητών με αυτές τις ιδιότητες. Η δυνατότητα να κατασκευάζουμε τον πυρήνα με βάση τις ιδιότητες αυτές αντί της κατασκευής κατευθείαν από το πστ.

**Παράδειγμα.**

- ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Χρήση της συνάρτησης συνάρτηση Green για εκφράσεις λύσεων σε μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών. Ιδιότητες των λύσεων κάνοντας χρήση ιδιοτήτων των (ήδη γνωστών) συναρτήσεων Green.

**Παράδειγμα.**